

Epreuve de mathématiques

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

On note f la fonction définie, pour tout réel x distinct de -1 et 0 , par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x + 1)}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que la fonction f s'écrive, pour tout réel x distinct de -1 et 0 , sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$

2. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x + 1} dx$ et en déduire $\int_1^2 f(x) dx$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer les modules et arguments de z_1 , z_2 , $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, et z_1^9 .
2. Résoudre l'équation : $z^2 + z + 10 = 0$.

Exercice 3

Calculer

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) dx$$

$$B = \int_3^4 \frac{1}{(x + 2)^3} dx$$

$$C = \int_1^2 (x + 1)e^{-2x} dx \quad (\text{on pourra utiliser une IPP})$$

$$D = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx \quad (\text{changement de variable : } u = \sqrt{2x-1})$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'(x) - 2y(x) = \ln(x)$$

On désigne par f une fonction de la variable réelle x , définie sur $]0; +\infty[$, solution de (E) et vérifiant la condition $f(1) = 0$.

1. Déterminer la solution générale de (e) $xy'(x) - 2y(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
2. Vérifier que la fonction g , définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}$ est une solution de l'équation (E).
3. Ecrire la solution générale de (E).
4. Déterminer la fonction f .

Exercice 5

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -6x - 1$$

1. Déterminer la solution générale de (e) $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$
2. Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = ax + b$ où a et b désignent des nombres réels.
3. Ecrire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2 .
5. On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - e^{3x-3}$$

et on appelle (C) représentative.

- Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. Préciser la position de (C) par rapport à la droite (D).
- Déterminer la dérivée de la fonction f .
- Résoudre l'équation, d'inconnue réelle x , $f'(x) = 0$.
- Etudier le sens de variation de la fonction f et établir son tableau de variation.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.

Exercice 6

On se propose de trouver la courbe d'équilibre, qu'on appelle chaînette, d'un fil homogène pesant, de masse linéaire μ (masse par unité de longueur), de tension horizontale T_0 supposée constante en tout point du fil lorsque ce fil est fixé en deux points A et B . Cette chaînette est la courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle (E)

$$(E) \quad T_0 y''(x) = \mu g \sqrt{1 + y'^2(x)}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La première partie étudie la fonction réciproque d'une fonction hyperbolique. La deuxième partie utilise cette fonction pour déterminer les solutions de (E). La troisième partie achève la détermination de cette courbe d'équilibre

Première partie

On définit les fonctions \sinh et \cosh par les relations :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \text{ étant la variable})$$

1. Calculer les dérivées de ces fonctions \sinh et \cosh
2. Montrer que la fonction \sinh est strictement croissante sur \mathbb{R} . Déterminer les limites de cette fonction lorsque la variable x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.
Soit t un réel arbitraire, montrer qu'il existe un réel unique x tel que $\sinh(x) = t$.
3. Soit f , la fonction réelle qui associe au nombre réel t , le nombre :

$$f(t) = \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right)$$

Calculer la dérivée de f et en déduire la dérivée de $f(u(t))$ où u est une fonction dérivable quelconque à valeurs réelles. Rappel : $f(u(t)) = f \circ u(t)$ et $(f \circ u)'(t) = f'(u(t)) \times u'(t)$.

4. Vérifier que, pour tout nombre réel t ,

$$\sinh(f(t)) = t$$

Il en résulte, en tenant compte de la question 2., l'équivalence où x et t sont des réels :

$$\sinh(x) = t \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(t)$$

Deuxième partie : intégration de (E)

1. Soit K un réel donné, déterminer les fonctions $u(x)$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u^2(x)}} = K$$

On utilisera la question 3. puis la question 4. de la première partie.

2. L'équation (E) peut s'écrire, en posant $K = \frac{\mu g}{T_0}$: $y''(x) = K \sqrt{1 + y'^2(x)}$

En posant d'abord $y'(x) = u(x)$, résoudre cette équation (E), la solution générale faisant intervenir deux constantes d'intégration a et b .

Troisième partie

Soit (C) la courbe représentative de la fonction y qui associe à tout réel x le nombre

$$y(x) = \frac{1}{K} \cosh(Kx + a) + b$$

(où $K = \frac{\mu g}{T_0}$ avec $\mu = 0.5$ kg/m, $T_0 = 150$ N, $g = 10$ m/s²)

On suppose que la courbe (C) passe par deux points A et B dont les coordonnées respectives sont: $(50; 20)$ et $(-50; 20)$.

1. Déterminer a en admettant que la relation $\cosh(u) = \cosh(v)$ n'est possible que si $u = v$ ou $u = -v$.
2. Déterminer un encadrement de b à 10^{-1} près sachant que $2,741 < \cosh\left(\frac{5}{3}\right) < 2,742$.