

Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

1. Calculer : $z_1 = (2 - 3i)(-5 + 3i)$ $z_2 = \frac{3 + 2i}{1 - i}$ $z_3 = (5 + i)^3$

2. Déterminer le module et un argument de :

$$z_4 = 1 + i \quad z_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_6 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad z_7 = -2i \quad z_8 = z_4 \times z_5$$

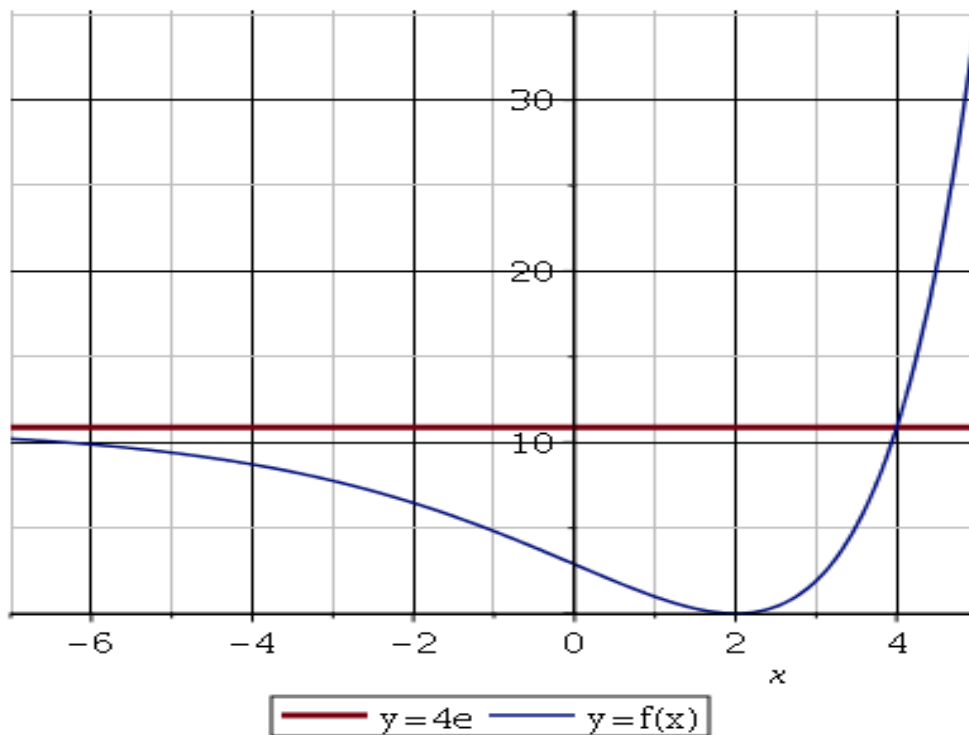
3. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

a) $2z^2 + z + 1 = 0$

b) $25z^2 = -4$

Exercice 2

PREMIÈRE PARTIE



Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

On note f la fonction, définie sur \mathbb{R} , représentée par la courbe C de la figure ci-dessus. On note f' la fonction dérivée de f .

On précise qu'au point A de coordonnées $(2, 0)$ la courbe C a pour tangente l'axe des abscisses.

1. Donner sans justification $f(2)$ et $f'(2)$.

2. On admet que, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = (ax + b)e^{\frac{1}{2}x} + 4e$ où a et b sont deux constantes réelles qu'on se propose de déterminer. Démontrer que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}ax + a + \frac{1}{2}b\right)e^{\frac{1}{2}x}.$$

3. Déterminer les constantes a et b (on pourra écrire un système linéaire de deux équations d'inconnues a et b en utilisant les résultats du 1.)

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on admet que, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = (2x - 8)e^{\frac{1}{2}x} + 4e$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on déduire de ce dernier résultat pour la courbe C ?
- Etudier les variations de la courbe f .
- Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0 est

$$f(x) = 4e - 8 - 2x + \frac{1}{12}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de T et C au voisinage de ce point.
- Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que,

$$\int_0^2 f(x) dx = 24 - 8e$$

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle : $xy' - 2y = -x^2$ où y est une fonction de la variable réelle x dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et où y' désigne la dérivée de y .

- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $xy' - 2y = 0$.
- Vérifier que la fonction g , définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 \ln x$ est une solution de l'équation (E).
- En déduire la solution générale de l'équation (E).
- Déterminer la solution f de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(e) = 0$. (e désigne la base du logarithme népérien).
- Existe-t-il des solutions de (E) sur \mathbb{R} ?

Exercice 4

- Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

En déduire le calcul de

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

- Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

En déduire le calcul de :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Exercice 5

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle x .

1. Résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

2. Vérifier que la fonction constante u définie pour tout réel x , par $u(x) = 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 1 - e^{-x} (\cos(x) + \sin(x))$$

Démontrer que la fonction f est une solution de (E).

5. Calculer $f'(x)$ puis dresser la tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{11\pi}{4}\right]$.

DEUXIÈME PARTIE

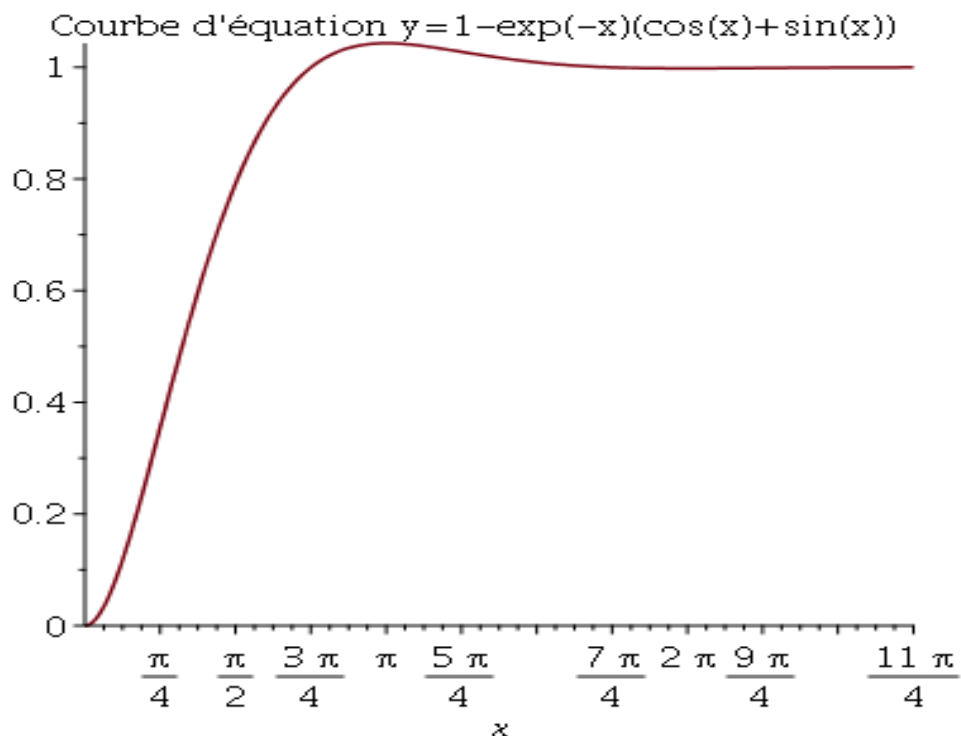
Une installation de dilution comprend un réservoir, des vannes et un système automatisé de régulation. Le niveau étant stabilisé dans le réservoir, le recyclage du produit provoque à un moment précis une variation brusque de consigne : $+1$ mètre.

Le niveau n (en mètres), en fonction du temps t (en minutes), est la solution de l'équation différentielle :

$$0,5 \frac{d^2 n}{dt^2}(t) + \frac{dn}{dt}(t) + n(t) = 1$$

qui vérifie $n(0) = \frac{dn}{dt}(0) = 0$.

1. A l'aide de la première partie, donner l'expression de la solution $n(t)$.
2. A quel instant t_{max} le réservoir est-il à son niveau maximal ? En déduire la hauteur de niveau du premier dépassement : $n(t_{max}) - 1$.



Exercice 6

1. Montrer que $4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x$.

En déduire $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} 4 \sin^3 x \, dx$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$ en utilisant le changement de variable $t = \tan x$

Exercice 7

Soit l'équation différentielle linéaire : $(1 + x^2) y'' + xy' - y = 0$.

1. Vérifier que $y_1(x) = x$ est une solution particulière.
2. En déduire la solution générale (on posera $y(x) = y_1(x).z(x)$).